Anwendung der JNF

Alle „Anwendungen" beruhen darauf, dass man Matrizen in JNF leicht potenzieren kann.

Notiz 15.23:

$$J(n;0)^k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}^k = \begin{array}{c} \text{Spalte } k+1 \\ \downarrow \\ \begin{pmatrix} & & 1 & & 0 \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & 1 \\ 0 & & & & \end{pmatrix} \end{array} \leftarrow \text{Zeile } k+1$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$ (Induktion)

$$J(n;a)^k = \begin{pmatrix} a & 1 & & & 0 \\ & a & 1 & & \\ & & a & 1 & \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & a \end{pmatrix}^k = \left[\begin{pmatrix} a & & & 0 \\ & a & & \\ & & a & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & a \end{pmatrix} + J(n;0)\right]^k$$

Notiz 15.22

$$\overset{\text{Notiz 15.22}}{=} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \begin{pmatrix} a & & & 0 \\ & a & & \\ & & a & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & a \end{pmatrix}^i J(n;0)^{k-i}$$

$$= \begin{pmatrix} a^k & \binom{k}{1}a^{k-1} & \binom{k}{2}a^{k-2} & \binom{k}{3}a^{k-3} & \cdots \\ 0 & a^k & \binom{k}{1}a^{k-1} & \binom{k}{2}a^{k-2} & \cdots \\ 0 & 0 & a^k & \binom{k}{1}a^{k-1} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & a^k & \cdots \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} \boxed{J(\dots;a_1)} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \boxed{J(\dots;a_i)} & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & \boxed{J(\dots;a_l)} \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \boxed{J(\dots;a_1)}^k & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \boxed{J(\dots;a_i)}^k & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & \boxed{J(\dots;a_l)}^k \end{pmatrix}$$

Ist $A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ nun beliebige Matrix, für die eine Jordanbasis J mit zugehöriger JNF $\hat{A}$ existiert (also $A = J \hat{A} J^{-1}$ wie in Korollar 1.5.19), so ist

$$A^k = J \underbrace{\hat{A}^k}_{\text{„einfach": siehe oben}} J^{-1}$$

Anwendung 1: Lineare Rekursion

Sei eine Folge $s_1, s_2, \dots$ in K definiert durch gegebene Werte $s_1, \dots, s_d$ und eine „Rekursionsformel"

$$s_{d+k} = \sum_{i=1}^{d} a_i s_{i+k-1} \quad \text{für alle } k \geq 1$$

Notiz 15.24: In dieser Situation gilt für alle $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{pmatrix} s_{1+k} \\ s_{2+k} \\ s_{3+k} \\ \vdots \\ s_{d-1+k} \\ s_{d+k} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & 0 & 1 & & \\ & & & 0 & \ddots & \\ & & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 & \\ & & & & & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_{d-1} & a_d \end{pmatrix}}_{=: A} \begin{pmatrix} s_{1+k-1} \\ s_{2+k-1} \\ s_{3+k-1} \\ \vdots \\ s_{d-1+k-1} \\ s_{d+k-1} \end{pmatrix}$$

$$= A^2 \cdot \begin{pmatrix} s_{1+k-2} \\ s_{2+k-2} \\ s_{3+k-2} \\ \vdots \\ s_{d+k-2} \end{pmatrix} = \dots = A^k \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ \vdots \\ s_d \end{pmatrix}$$

Beispiel:

$$s_1 = -1$$
$$s_2 = 1$$
$$s_{2+k} = \underbrace{-9}_{a_1} s_k + \underbrace{6}_{a_2} s_{1+k} \quad \text{für } n \geq 1.$$

Also:
$$s_3 = (-9)\cdot(-1) + 6 \cdot 1 = 15$$
$$s_4 = (-9)\cdot 1 + 6 \cdot 15 = 81$$
$$s_5 = (-9)\cdot 15 + 6 \cdot 81 = 351$$
$$\vdots$$

Allgemeine Formel:

$$\begin{pmatrix} s_{1+k} \\ s_{2+k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_k \\ s_{1+k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 6 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 6 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Für $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 6 \end{pmatrix}$ haben wir Jordanbasis $J := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

mit $\hat{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ (siehe ~~Beispiel~~ zu 15.19)

Es ist also

$$A^k = J \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^k J^{-1} = J \begin{pmatrix} 3^k & k \cdot 3^{k-1} \\ 0 & 3^k \end{pmatrix} J^{-1}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^k & k \cdot 3^{k-1} \\ 0 & 3^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} (1-k)3^k & k 3^{k-1} \\ -k 3^{k+1} & (k+1) 3^k \end{pmatrix}$$

Also ergibt sich:

$$s_{2+k} = \begin{pmatrix} -k 3^{k+1} & (k+1) 3^k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= k \cdot 3^{k+1} + (k+1) 3^k$$
$$= \underline{\underline{3^k \cdot (4k+1)}}$$

Wir können auf diese Weise sogar „unendliche Potenzen" berechnen.

$\boxed{\text{Ab jetzt: } K = \mathbb{C}}$

Analysis: $\exp: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longmapsto e^z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$

15.25 Def.: Die Matrixexponentialfunktion ist die Abbildung

$$\exp: \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n) \longrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$$
$$A \longmapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

Warum ist das wohldefiniert?

15.26 Def.: Für $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$ ist

$$\| A \| := n \cdot \max \{ |a_{ij}| \mid i,j = 1, \dots, n \} \in \mathbb{R}$$

die Matrixnorm von A.

15.27 Notiz: Für die Matrixnorm gilt:

1. $\| A \| \geq 0$ und $\| A \| = 0 \iff A = 0$
2. $\| s \cdot A \| = |s| \cdot \| A \| \quad \forall s \in \mathbb{C}$
3. Dreiecksungleichung:
   $\| A + B \| \leq \| A \| + \| B \|$
4. $\| A \cdot B \| \leq \| A \| \| B \|$

Beweis:

1, 2: klar.

3: Für $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ ist jeweils

$$|a_{ij} + b_{ij}| \leq |a_{ij}| + |b_{ij}|,$$

also auch

$$\max\{|a_{ij} + b_{ij}|\} \leq \max\{|a_{ij}| + |b_{ij}|\}$$
$$\leq \max\{|a_{ij}|\} + \max\{|b_{ij}|\}$$

4:
$$\|A \cdot B\| = n \cdot \max\left\{\left|\sum_j a_{ij} b_{jk}\right| \;\middle|\; i,k = 1, \dots, n\right\}$$
$$\leq n \cdot \max\left\{\sum_j |a_{ij} b_{jk}| \;\middle|\; i,k = 1, \dots, n\right\}$$
$$= n \cdot \max\left\{\sum_j |a_{ij}| |b_{jk}| \;\middle|\; i,k = 1, \dots, n\right\}$$
$$\leq n \cdot n \cdot \max\left\{|a_{ij}| |b_{\ell k}| \;\middle|\; i,j,\ell,k = 1, \dots, n\right\}$$
$$= n^2 \cdot \max\left\{|a_{ij}| \;\middle|\; i,j \dots \right\} \cdot \max\left\{|b_{ij}| \;\middle|\; i,j = \dots\right\}$$
$$= \|A\| \cdot \|B\| \qquad \square$$

15.28 Def:

Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)}$ mit $A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)}) \in Mat_{\mathbb{C}}(n \times n)$ ist **konvergent**, wenn für alle i und j

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{ij}^{(k)} \quad \text{in } \mathbb{C} \text{ konvergiert,}$$

absolut Kovergent, wenn

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_{ij}^{(k)}| \quad \text{in } \mathbb{R} \text{ konvergiert,}$$

und **normkonvergent**, wenn

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|A^{(k)}\| \quad \text{in } \mathbb{R} \text{ konvergiert.}$$

Für eine konvergente Reihe ist also $\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)}$ eine wohldefiniete Matrix.

15.29 Notiz:

normkonvergent $\overset{①}{\Longrightarrow}$ absolut konvergent $\overset{②}{\Longrightarrow}$ konvergent

($\forall i,j$: $|a_{ij}^{(k)}| \leq \frac{1}{n} \cdot \|A^{(k)}\|$; also folgt ① aus Majorantenkriterium aus Analysis I.
Zu ② siehe ebenfalls Analysis I.)

15.30 Notiz:

In der Notation von Def. 15.25 ist $\exp(A)$ normkonvergent (also insbesondere konvergent) für jede Matrix A.

($\|\frac{1}{k!} \cdot A^k\| \leq \frac{1}{k!} \cdot \|A\|^k$ laut 15.27 ② & ④, und
$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \|A\|^k = \exp(\|A\|)$ konvergiert in $\mathbb{R}$.)

15.31 Beispiele:

① Für eine Diagonalmatrix ist

$$\exp\begin{pmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{a_1} & & & 0 \\ & e^{a_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{a_n} \end{pmatrix}$$

② Für beliebige nilpotente Matrix $N \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$ ist $\exp(N)$ eine endliche Summe:

$$\exp(N) = \mathbb{1} + N + \frac{1}{2}N^2 + \frac{1}{3!}N^3 + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}N^{n-1}$$

③ Insbesondere folgt mit Notiz 15.25:

$$\exp\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3!} & \cdots & \frac{1}{(n-1)!} \\ & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{(n-2)!} \\ & & 1 & 1 & & \frac{1}{(n-3)!} \\ & 0 & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & & 1 \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

④ Für Blockmatrizen gilt:

$$\exp\begin{pmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_\ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(A_1) & & & 0 \\ & \exp(A_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \exp(A_\ell) \end{pmatrix}$$

Für allgemeine Berechnung hilft:

15.31 Satz:

① Multiplikationssatz Für kommutierende Matrizen ($AB = BA$)
$A, B \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$ gilt:
$$\exp(A+B) = \exp(A) \cdot \exp(B)$$

② Für beliebiges $B \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$ und $J \in GL_n(\mathbb{C})$ ist
$$\exp(JBJ^{-1}) = J \exp(B) \cdot J^{-1}$$

Beweis:

1: Genau wie für gewöhnliche Exponentialfunktion:
$$\frac{1}{k!}(A+B)^k \overset{15.22}{=} \frac{1}{k!} \cdot \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} A^i B^{k-i}$$
$$= \frac{1}{\cancel{k!}} \cdot \sum_{i=0}^{k} \frac{\cancel{k!}}{i! \cdot (k-i)!} A^i B^{k-i}$$
$$= \sum_{i=0}^{k} \left(\frac{1}{i!} A^i\right) \cdot \left(\frac{1}{(k-i)!} B^{k-i}\right),$$
somit
$$\exp(A+B) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{k} \left(\frac{1}{i!} A^i\right) \cdot \left(\frac{1}{(k-i)!} B^{k-i}\right)$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{i,j \geq 0: \\ i+j=k}} \left(\frac{1}{i!} A^i\right) \cdot \left(\frac{1}{j!} B^j\right)$$
$$\overset{\text{Cauchy-Produktformel}}{=} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} A^i\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} B^j\right)$$
$$= \exp(A) \cdot \exp(B)$$
Für die Anwendung der Cauchy-Produktformel benötigen wir die absolute Konvergenz von $\exp(A)$ und $\exp(B)$, die aus Notizen 15.29 und 15.30 folgt.

2: folgt aus $(JBJ^{-1})^k = JB^kJ^{-1}$ $\square$

15.32 Rezept: Berechnung von $\exp(A)$

$$A \in Mat_{\mathbb{C}}(n \times n)$$

SCHRITT 1:

Bestimme Jordannormalform $\hat{A}$, zugehörige Jordanbasis J und JC-Zerlegungen wie in 15.19, sodass also gilt:

$$A = J \hat{A} J^{-1} \quad \text{und} \quad \hat{A} = \hat{D} + \hat{N}$$

mit $\hat{D}$ Diagonalmatrix, $\hat{N}$ nilpotent, $\hat{A}, \hat{D}, \hat{N}$ kommutieren. $\hat{N}$ ist Blockmatrix aus Jordanblöcken $J(\ldots;0)$.

SCHRITT 2:

Berechne $\exp(\hat{D})$ und $\exp(\hat{N})$ wie in Bsp. 15.31.

SCHRITT 3: $\exp(\hat{A}) = \exp(D) \cdot \exp(N)$ (15.31 (1))

SCHRITT 4: $\exp(A) = J \cdot \exp(\hat{A}) \cdot J^{-1}$ (15.31 (2))

Beispiel:

Für $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 6 \end{pmatrix}$ finden wir Jordanbasis $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

und $\hat{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}_{\hat{D}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\hat{N}}$ (siehe Bsp. oben)

$$\exp\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^3 & 0 \\ 0 & e^3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \exp\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{also}$$

$$\exp \hat{A} = \begin{pmatrix} e^3 & 0 \\ 0 & e^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = e^3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot e^3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= e^3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{e^3 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -9 & 4 \end{pmatrix}}$$

Anwendung 2: Differentialgleichungen

$$\underline{x}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^n \qquad \qquad \dot{\underline{x}}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^n$$

$$t \mapsto \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \\ x_n(t) \end{pmatrix} \qquad \qquad t \mapsto \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix}$$

mit x_i differenzierbar $\qquad$ (mit $\dot{x}_i(t) := \frac{d}{dt} x_i(t)$)

15.33 Def: Ein homogenes lineares Differentialgleichungs-System erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten ist eine Gleichung der Form

$$\dot{\underline{x}} = A \cdot \underline{x}$$

für ein $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$. Für ein gegebenes $\underline{x}_0 \in \mathbb{C}^n$ ist eine Lösung zum Anfangswert $\underline{x}_0$ eine differenzierbare Abb. $\underline{x}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^n$ mit $\underline{x}(0) = \underline{x}_0$ und $\dot{\underline{x}}(t) = A \cdot \underline{x}(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

$$\left(A \cdot \underline{x} - \dot{\underline{x}} = \underline{0} \right)$$

linear, konstante Koeffizienten

nur Ableitungen erster Ordnung

homogen

15.34 Satz: Für jedes $\underline{x}_0 \in \mathbb{C}^n$ ist

$$\underline{x}(t) := \exp(A \cdot t) \cdot \underline{x}_0$$

eine Lösung des Systems zum Anfangswert $\underline{x}_0$.

Beweis:

Offenbar $\underline{x}(0) = \exp(0\text{-Matrix}) \cdot \underline{x}_0 = \mathbb{1}_n \cdot \underline{x}_0 = \underline{x}_0$.

Es reicht ferner zu zeigen $\frac{d}{dt} \exp(A \cdot t) = A \cdot \exp(A \cdot t)$, denn dann gilt

$$\dot{\underline{x}} = \frac{d}{dt}\left(\exp(A \cdot t)\right) \cdot \underline{x}_0 = A \cdot \exp(A \cdot t) \cdot \underline{x}_0 = A \cdot \underline{x}.$$

Tatsächlich ist

$$\frac{d}{dt}\left(\exp(At)\right) = \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \cdot t^k$$

Potenzreihen dürfen gliedweise abgeleitet werden.

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \frac{d}{dt} t^k$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} k \cdot A^k t^{k-1}$$

$$= A \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} A^{k-1} t^{k-1}$$

$$= \exp(A \cdot t) \qquad \square$$

Theorem (Picard-Lindelöf): Das ist auch die einzige Lösung zum Anfangswert $\underline{x}_0$. $\square$

Beweis fehlt

Beispiel: $\dot{x}_1(t) = \frac{1}{2}\cdot x_1 - 2\cdot x_2 \quad \text{mit} \quad x_1(0) = 500$

$\dot{x}_2(t) = \frac{1}{8}\cdot x_1 + \frac{3}{2}\cdot x_2 \quad \text{mit} \quad x_2(0) = 10$

Lösung:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \exp\Big(\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -2 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}\cdot t}_{A}\Big)\cdot\begin{pmatrix} 500 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \chi_A &= \left(\tfrac{1}{2}t - X\right)\left(\tfrac{3}{2}t - X\right) + 2\cdot\tfrac{1}{8}\cdot t^2 \\ &= X^2 - 2t + \tfrac{3}{4}t^2 + \tfrac{1}{4}t^2 \\ &= X^2 - 2t + t^2 \\ &= (X-t)^2. \end{aligned}$$

Also hat JNF $\hat{A}$ von A die JC-Zerlegung

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} t & ? \\ 0 & t \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}}_{\hat{D}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & ? \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\hat{N}}$$

und wir erhalten für A JC-Zerlegung

$$A = D + N$$

Jordanbasis

mit $D = J\hat{D}J^{-1} = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$

und $N = A - D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -2 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\cdot t$

Demnach

$$\begin{aligned} \exp(A) &= \exp\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}\cdot\exp\left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -2 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\cdot t\right) \\ &= \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}\cdot\left(\mathbb{1} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -2 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\cdot t\right) \qquad (N^2 = 0) \\ &= e^t\cdot\begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}t & -2t \\ \frac{1}{8}t & 1 + \frac{1}{2}t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Also insgesamt

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = e^t\cdot\begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}t & -2t \\ \frac{1}{8}t & 1 + \frac{1}{2}t \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 500 \\ 10 \end{pmatrix}$$